Frações Contínuas

Douglas de Araujo Smigly

Grupo de estudos para a OBM

Junho de 2016

1 Aquecimento

(1) Determine a representação dos seguintes números por frações contínuas:

(a) 8 ***(b)*** $\frac{23}{7}$ ***(c)*** $\frac{11}{13}$

(d) $\sqrt{5}+1$ ***(e)*** $8-\sqrt{\frac{3}{5}}$ ***(e)*** $\ln 2$

(2) Verifique se cada um dos números abaixo é inteiro,racional ou irracional, justificando convenientemente sua resposta.

(a) $[7]$ ***(b)*** $[1;4,2,1]$

(c) $[2;1,\overline{3,4}]$ ***(d)*** $[1;\overline{1}]$

(e) $[2;7,8,7,8,2]$ ***(f)*** $[0;\overline{7,4,5,8}]$

(g) $[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,...]$ ***(h)*** $[4;\overline{8,6}]$

(3) Escreva os números que correspondem às frações contínuas da questão 2.

(4) Responda ao que se pede:

(a) Determine as frações contínuas associadas a $\frac{47}{18}$ e $\frac{18}{47}$.

(b) Prove que, $\forall x,y \in \mathbb{Z}_+$ se $\frac{x}{y}=[a_0;a_1,a_2,...,a_n]$, então $\frac{x}{y}=[0;a_0,a_1,a_2,...,a_n]$.

(5) Determine x e y que satisfaçam o seguinte sistema: [1]

$$\begin{cases} [2;1,x]+[3;x,y]=[6;65,x] \\ [y;\overline{x}]-[1;1,6,\overline{x}]=[10] \end{cases}$$

[1]Dica: Utilize o resultado da questão 5 da seção 2.

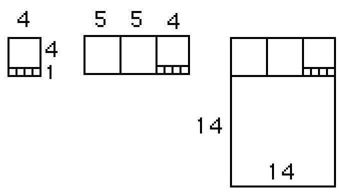
(6) Faça o que se pede:

(*a*) Calcule:

- $[2; 1, 4, 2]$
- $[2; 1, 4, 3]$
- $[2; 1, 4, 4]$
- $[2; 1, 4, 5]$

(*b*) Verifique que $[2; 1, 4, n] = \frac{14n+3}{5n+1}$.

(7) Os retângulos abaixo mostram uma forma de apresentar frações contínuas. Quais são essas frações?



(8) Mostre que, se $p > q$ e $\frac{p}{q} = [a_1; a_2, a_3, ..., a_n]$, então $\frac{q}{p} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$, em que $a_0 = 0$.

(9) Determine a fração contínua de $\sqrt{7}$. Mostre que ela é periódica a partir de um certo ponto, e determine o período.

(10) A partir de $[1; 1, 2, 3] = \frac{17}{10}$, escreva a fração contínua na forma matricial e conclua que $[3; 2, 1, 1] = \frac{17}{5}$ e $[3; 2, 1] = \frac{10}{3}$. [2]

(11) Encontre as frações contínuas de $\sqrt{a^2+4}$ e $\sqrt{a^2-4}$.

(12) Demonstre que, para todo inteiro positivo a, temos as seguintes expansões em frações contínuas periódicas:

(*a*) $\sqrt{a^2+1} = [a, \overline{2a}]$.
(*b*) $\sqrt{a^2-1} = [a-1; \overline{1, 2a-2}]$.
(*c*) $\sqrt{a^2-2} = [a-1; \overline{1, a-2, 1, 2a-2}]$.
(*d*) $\sqrt{a^2-a} = [a-1; \overline{2, 2a-2}]$.

(13) Prove que, se p é primo, então a fração contínua de $\sqrt{p}$ é da forma

$$\sqrt{p} = [\alpha_1; \overline{\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m, \alpha_m, ..., \alpha_3, \alpha_2, 2\alpha_1}].$$

(14) Seja $\lambda = [2; \overline{1, 3, 2}]$. Considere $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$ tais que

$$\lambda = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}$$

Seja $f(n)$ o n-ésimo número k tal que $\alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \delta^k$ é primo. Prove que $\sum_{i=1}^{3} f(i)$ é primo.

[2] Para teoria e informações sobre frações contínuas multidimensionais, veja [10].

2 Problemas gerais

(1) Prove que um número real pode ser escrito como um fração contínua se, e somente se, este número é racional.

(2) Prove que

$$\frac{(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n}{(2+\sqrt{2})^n-(2-\sqrt{2})^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{\dots+\frac{\dots}{1+2}}}}$$

(3) Considere a sequência a_n tal que $a_0=0$ e $a_n=\lfloor n\varphi\rfloor\ \ \forall n>0\in\mathbb{N}$, em que $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Considere agora a sequência $b_n=(a_{n+1}-a_n)-1$. Seja então $\gamma=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{10^k}$ na base numérica 2. Seja γ_{10} a representação de γ na base decimal.
Prove que

$$\gamma_{10}=\cfrac{1}{2^{F_0}+\cfrac{1}{2^{F_1}+\cfrac{1}{2^{F_2}+\cfrac{1}{2^{F_3}+\cfrac{1}{2^{F_4}+\ddots}}}}}.$$

Em que F_n denota o n-ésimo termo da Sequência de Fibonacci, definida por

$$F_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right)$$

(4) Considere a fração contínua de $\sqrt{d}$. Seja $\frac{p_n}{q_n}$ sua n-ésima convergente. Prove que, para algum n, $p_n^2-dq_n^2=1$.

(5) Prove que $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots\frac{1}{x}}}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

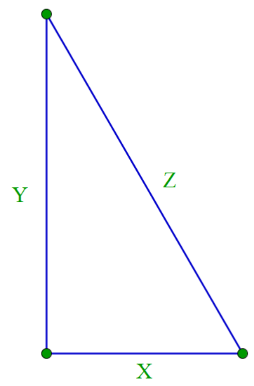
(6) Prove que para todo x natural par, então:

$$x^2=\left((x-1)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-1)^2}{2x-1}\right)\cdot\left((x+1)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{\infty}\frac{(2i-1)^2}{2x+1}\right)$$

(7) Construa o Diagrama de Klein para a expansão em frações contínuas de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(8) Um ano tem $J=365,2425$ dias e um período lunar sinódico tem $M=29,53059$ dias. Os gregos calcularam que haveriam aproximadamente 235 períodos em 19 anos. Obviamente, $\frac{19}{235}$ é uma aproximação muito boa para $\omega=\frac{M}{J}$! Demonstre isso utilizando a expansão em frações contínuas e analisando seus convergentes.

(9) Encontre os conjuntos de inteiros (x, y, z) para os quais os lados do triângulo retângulo da figura abaixo, à medida que aumentam, o ângulo θ entre x e z se aproxima de $\frac{\pi}{3}$.



(10) Prove [3] que

$$\frac{\sqrt{12}}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3\cdot 3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{3\cdot 7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{3\cdot 11 + \ldots}}}}}$$

(11) Seja

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 \ldots + \cfrac{(2n-3)^2}{2}}}}}}$$

a n - ésima convergente da fração contínua

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \ddots}}}}}$$

Demonstre que $\frac{p_n}{q_n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$.

(12) Faça o que se pede:

(a) Prove que

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{1\cdot 3}{4 + \cfrac{3\cdot 5}{4 + \cfrac{5\cdot 7}{4 + \ddots}}}}$$

(b) Prove que

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{1\cdot 3}{8 + \cfrac{3\cdot 5}{8 + \cfrac{5\cdot 7}{8 + \ddots}}}}$$

[3] Para outras identidades envolvendo π, veja [2]

(13) Prove que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, e quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$ com $s < t$, existem inteiros m, n com $n > 0$ tais que $s < n\alpha + m < t$.

(14) Observe que

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}.$$

(a) Verifique:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

(b) Verifique:

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\ddots}}}}$$

(c) Prove que

$$\sqrt{n^2+1} = n + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{2n+\cfrac{1}{2n+\ddots}}}}.$$

(15) ***(a)*** Verifique a veracidade da expressão abaixo:

$$\mathrm{tg}x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{1}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ddots}}}}$$

(b) Encontre outra forma de representar $\mathrm{tg}x$ a partir de frações contínuas.

(16) Seja $a_n = 4n$ $\forall n \geq 1$. Considere $\frac{\alpha}{\beta}$, com $mdc(\alpha, \beta) = 1$ o número racional representado pela fração contínua

$$\frac{\alpha}{\beta} = \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{a_{n+2}}}}$$

Escolhendo-se ao acaso um valor de n do conjunto $A = \{1, 2, 3, ..., 15, 16\}$ Qual é a probabilidade de $\alpha + \beta$ ser primo?

3 Problemas de Olimpíadas

(1) (Torneio das Cidades 1991) Sejam $a = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\ddots \frac{1}{99}}}}$ e $b = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{\ddots \frac{1}{100}}}}$. Prove que $|a-b| < \frac{1}{99!100!}$.

(2) (Olimpíada Matemática Espanhola 2011) Cada número racional é pintado de uma cor utilizando apenas duas cores: verde e azul. Uma determinada coloração é *sanfermi-nera* quando para cada um dos números racionais x, y, com $x \neq y$, os que satisfazem as três condições seguintes:

- $xy = 1$;
- $x + y = 0$;
- $x + y = 1$.

São pintados da mesma cor. Quantas colorações *sanfermineras* existem?

(3) (Putnam 1995) Calcule

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \frac{1}{2207 - \dots}}}$$

Escreva sua resposta na forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, onde a, b, c e d são inteiros.

(4) (Olimpíada Russa de Matemática 1958) Resolver nos inteiros positivos

$$1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots + \frac{1}{1958}}} = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \ddots + \frac{1}{x_{1958}}}}$$

(5) (Olimpíada Paulista de Matemática 2013) Os números reais podem ser expressos na forma de frações contínuas, isto é, na forma:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

em que a_0 é inteiro e $a_1, a_2, a_3, ...$ são inteiros positivos. Utiliza-se a notação $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$ Por exemplo, para escrever $\frac{2013}{37}$ na forma de fração contínua, inicialmente, calculamos o maior inteiro menor ou igual a esse racional. Esse é o a_0.
Assim:

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \frac{1}{\frac{37}{15}}$$

E repetimos o processo agora para $\frac{37}{15}$ e, assim por diante, obtendo $a_1, a_2, a_3, ...$

$$\frac{2013}{37} = 54 + \frac{15}{37} = 54 + \frac{1}{\frac{37}{15}} = 54 + \frac{1}{2 + \frac{7}{15}} = 54 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{15}{7}}} = 54 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{7}}}$$

Temos então que $\frac{2013}{37} = [54; 2, 2, 7]$. Pode-se demonstrar que todo racional tem uma representação finita (com um número finito de a_i's) como fração contínua.

As coisas ficam ainda mais interessantes quando consideramos os números irracionais. Cada irracional possui uma representação única como fração contínua a qual é infinita. E, quando a truncamos, ela fornece as melhores aproximações racionais para ele.
Por exemplo, $\pi = 3,14159265358979323846 2... = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, ...]$. Adotando

$$\pi \approx [3; 7, 15, 1] = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3,14159292...$$

obtemos uma excelente aproximação!
Uma questão extremamente interessante da teoria de frações contínuas é: quais números têm uma representação periódica quando escritos dessa maneira? Por exemplo, qual número real tem a representação $[1; 1, 1, 1, ...] = [1; \overline{1}]$?
Seja

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Então podemos observar que (verifique)$x = 1 + \frac{1}{x} \leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e, como x é positivo, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como φ a razão áurea!
E como é a representação de $\sqrt{3}$? Fazemos o procedimento usual. O maior inteiro menor do que $\sqrt{3}$ é 1. Assim:

$$\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1) = 1+\frac{1}{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}} = 1+\frac{1}{\frac{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\mathbf{3}}+\mathbf{1}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2+(\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1})}}}$$

Repetindo as passagens acima:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(\sqrt{\mathbf{3}}-\mathbf{1})}}}}$$

E assim por diante. Ou seja, $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$.

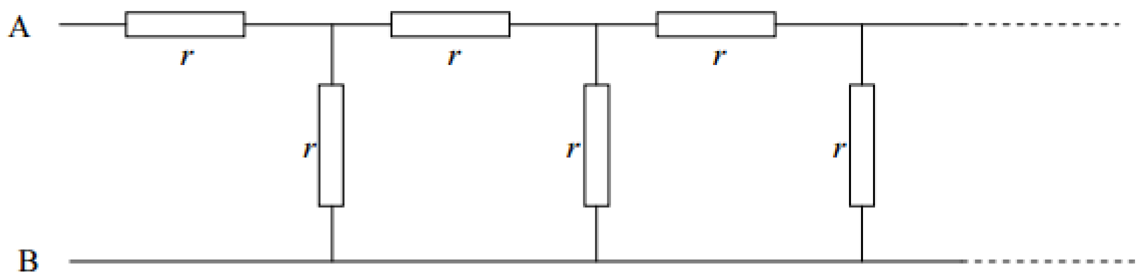
(a) Escreva a representação de $\frac{2017}{41}$ como fração contínua.

(b) Escreva a representação de $\sqrt{11}$ como fração contínua e conclua que $\sqrt{11} \approx \frac{199}{60}$.

(6) (Olimpíada Internacional de Matemática Universitária 2010) Seja $0 < a < b$.
Prove que

$$\int_a^b (x^2 + 1) \cdot e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

(7) (Olimpíada Internacional de Física 1967) Considere uma rede infinita consistindo de resistores (cada qual com resistência r) como mostra a figura. Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B.



(8) Definimos a sequência

$$a_n = n\sqrt{5} - \lfloor n\sqrt{5} \rfloor$$

Determine os valores de $n \leq 2011$ tais que a_n seja respectivamente máximo e mínimo.

(9) (Torneio Harvardo-MIT 2011) Para todos os números reais x, seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2011]{1-x^2011}}$. Calcule $f(f(f(...(f(2011))...)))^{2011}$, onde (f) é aplicada 2010 vezes.

(10) Determine o maior número dentre $[1; 2, 3, ..., 2009, 2010]$ e $[1; 2, 3, ..., 2009, 2011]$, notação equivale à seguinte representação:

$$[1; 2, 3, ..., 2009, 2010] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots + \frac{1}{2010}}}$$

$$[1; 2, 3, ..., 2009, 2011] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ddots + \frac{1}{2011}}}$$

4 Aplicações

4.1 Integrais

(1) Faça o que se pede:

(a) Prove que

$$\int ax^3+bx^2+cx+d = \left[dx; \frac{cx^2}{2}, \frac{-2bx}{3c}, \left(\frac{2b}{3c}-\frac{3a}{4b}\right)x, -\left(\frac{27a^2c}{4b(8b^2-9ac)}\right)x, -\left(\frac{6abx}{9ac-8b^2}\right)x\right]$$

(b) Seja $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Mostre que existe uma sequência de termos α_i tal que

$$\int f(x)dx = \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{2n-1} \alpha_i$$

(2) Prove[4] que

$$\int_0^x e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \cfrac{\frac{e^{-x^2}}{2}}{x+\cfrac{1}{2x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{2x+\cfrac{4}{x+\ddots}}}}}$$

(3) Prove que

$$\int \cos x\; dx = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{(6-x^2)+\cfrac{6x^2}{(20-x^2)+\cfrac{20x^2}{(42-x^2)+\ddots}}}}$$

(4) Sabendo [5] que

$$\int_0^\infty \frac{t}{e^{tz}\mathrm{senh}(t)}dt = \frac{1}{z+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{(2k+1)z}},$$

(a) Determine uma aproximação para $\int_0^\infty \frac{t}{e^{2t}\mathrm{senh}(t)}dt$.

(b) Verifique que $\int_0^\infty \frac{t}{e^{2t}\mathrm{senh}(t)}dt = \frac{\pi^2}{12}$ e compare com a representação em frações contínuas de $\frac{\pi^2}{12}$.

(c) Sabendo que

$$\frac{\pi^2-6}{12} = \frac{1}{3+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{3\left(2k+\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{2^i}\right)}} \quad \text{e} \quad \frac{6\pi^2-49}{72} = \frac{1}{7+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{2\left(7k+2\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{2^i}\right)}}$$

[4]para mais identidades envolvendo integrais, veja [8]

[5]$\mathrm{senh}(t)$ representa a função seno hiperbólico, definida por que $\mathrm{senh}(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$.

Prove que

$$\frac{\int\limits_0^\infty \frac{t}{e^{7t}\operatorname{senh}(t)}dt}{\int\limits_0^\infty \frac{t}{e^{3t}\operatorname{senh}(t)}dt} = 36\left(\frac{36\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-49}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-1}\right).$$

4.2 Aproximações de irracionais

(5) Encontre uma fração na forma $\frac{p}{q}$ cujo erro em relação a π seja menor que 10^{-5}.

(6) Prove que, para quaisquer inteiros p, q com $q > 0$ temos $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{3q^2}$.

(7) Seja $\frac{p_a}{q_a}$ a menor convergente de $\sqrt{2}$ cuja soma $p_a + q_a$ é um quadrado perfeito. Determine o valor de a.

(8) Encontre as 6 primeiras casas decimais de $\sqrt{80}$.

(9) Determine uma aproximação razável para $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ utilizando frações contínuas.

(10) A partir da constatação de que

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{10+\frac{1}{14+ddots}}}}$$

podemos obter aproximações cada vez melhores de e. Por exemplo, a 7ª convergente de $\frac{e-1}{2}$ é $\frac{342762}{398959}$.

(a) Utilize esse fato para mostrar que

$$e \approx \frac{1084483}{398959}$$

(b) Determine ε na forma 10^k tal que

$$\left|e - \frac{1084483}{398959}\right| \leq \varepsilon.$$

(11) A partir da expansão em frações contínuas

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{1}{\frac{6}{x}+\frac{1}{\frac{10}{x}+\frac{1}{\frac{14}{x}+\ddots}}}} = \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k-2}$$

(a) Conclua que, se x é um número racional diferente de 0, então e^x não pode ser racional;

(b) Determine uma aproximação para $\frac{e^3-1}{e^3+1}$.

4.3 Equações de Pell

(12) Determine uma solução de $x^2 - 29y^2 = 1$.

(13) Prove que a equação $x^2 - 3y^2 = -1$ não possui soluções inteiras.

(14) Encontre as soluções inteiras de
(a) $x^2 + y^2 = 1129$
(b) $x^2 + y^2 = 1009$

(15) Prove que, se (x_1, y_1) é a menor solução positiva de $x^2 - Ny^2 = 1$, então todas as outras soluções positivas (x_n, y_n) podem ser obtidas da equação

$$x_n + y_n\sqrt{N} = \left(x_1 + y_1\sqrt{N}\right)^n$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$.

4.4 Equações diofantinas

(16) Encontre as soluções inteiras de $323x + 391y + 437z = 10473$.

(17) Determine a quantidade de soluções $(x, y) \in \mathbb{N}$ da equação

$$21x - 26y = 101$$

Para os quais $x + y$ é um quadrado perfeito.

(18) Determine as soluções de $15x + 25y = 945$.

4.5 Soma de quadrados

(19) Expresse os seguintes números como soma de quadrados:

(a) 29
(b) 13
(c) 353
(d) 433
(e) 461
(f) 877
(g) 1549
(h) 2777
(i) 2789
(j) 5297
(k) 7877
(l) 3041
(m) 104729
(n) 78877

(20) Há duas tropas de soldados divididas em dois quadrados, cada um contendo b colunas e b soldados. Mostre que é impossível combinar os dois quadrados em um único quadrado de soldados. Mostre ainda que, se um soldado for adicionado ou sair de um quadrado, as duas tropas podem ser combinadas em um quadrado.

(21) Prove que todo número na forma

$$4^k(8m+7)$$

Com $k, m \in \mathbb{N}$ não pode ser escrito como soma de dois quadrados perfeitos.

Referências

[1] DAJANI, Karma; KRAAIKAMP, Cor. *A note of the approximation by continued fractions under an extra condition.* J. Math, Nova York, 1998.

[2] FRISCHEMEIER, Daniel. *π und Kettenbrüche*, 2009

[3] KHINTCHINE, Alexandre. *Kettenbrüche.* Teubner, 1958.

[4] LANDAU, Edmund. *Teoria elementar dos números.* São Paulo: Avercamp, 2002

[5] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araujo; *Frações Contínuas, representações de números e aproximações.* Revista EUREKA! 3, Olimpíada Brasileira de Matemática, 1998, p. 44-55.

[6] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araujo; SALDANHA, Nicolau Corção; TENGAN, Eduardo; MARTINEZ, Fabio Enrique Brochero. *Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.* Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[7] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araujo; *Propriedades estatísticas de frações contínuas e aproximações diofantinas.* Revista Matemática Universitária, Sociedade Brasileira de Matemática, nº 29, 2000.

[8] OLDS, Carl Douglas. *Continued Fractions.* Mathematical Association of America, v. 9, Nova York, 1963.

[9] PAIXÃO, João Carreira. *Sucessões e frações contínuas.* Gazeta de Matemática, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2012

[10] SCHWEIGER, Fritz; *Multidimensional Continued Fractions.* Oxford Science Publications, Nova York, 2000.

[11] SMARANDACHE, Florentin; *Sequences of numbers involved in unsolved problems.* Hexis, 2006.